

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ СТЕРЖНЯМИ КОРОбЧАТОГО СЕЧЕНИЯ

Аннотация.

Актуальность и цель. При расчете методом конечных элементов оболочки и пластины, подкрепленных стержнями, в конечно-элементной модели стержень представляет собой линию, наделенную соответствующими физическими и геометрическими характеристиками с расположением в плоскости конструкции. Особенности крепления стержня не учитываются. Наиболее часто используются стержни коробчатого квадратного сечения. Цель работы – обеспечить расчет подкрепленной оболочки и пластины стержнями коробчатого квадратного сечения с использованием конечных элементов с узлами по контурам сечений, соответствующим узлам крепления стержня.

Материалы и методы. Исследования проводятся на основе метода конечных элементов с использованием дискретных расчетных схем и программных средств.

Результаты. В стандартной конечно-элементной постановке с помощью матриц переноса узловых сил и перемещений получены выражения в блочной форме матриц жесткости балочных конечных элементов с узлами по контурам сечений, соответствующим симметричному креплению стержня и в «шахматном» порядке. Моделирование подкрепленных конструкций, полнее отражающее силовое и кинематическое взаимодействие стержней, пластин и оболочек в узлах их соединения, реализовано в целевых программах для ЭВМ.

Выводы. Подход к моделированию подкрепленной конструкции позволяет в ее конечно-элементной модели учесть условия крепления стержня коробчатого квадратного сечения, что полнее отражает особенности сопряжения КЭ. Программы расчета на ЭВМ можно рекомендовать для кинематического анализа различных металлических конструкций при оболочечно-стержневой и пластинчато-стержневой их идеализации.

Ключевые слова: оболочка, пластина, стержень, узлы по контурам сечений, матрица жесткости, подкрепленные конструкции, программа для ЭВМ.

S. A. Chernov

MODELLING OF THE THIN-WALLED STRUCTURES, SUPPORTED WITH RODS OF BOX SECTION

Abstract.

Background. In the course of calculation of the method of final elements of shells and plates, supported by rods, in a finite element model the ROD is a single line with appropriate physical and geometrical characteristics located in a construction plane. The author didn't take into account mounting features of rods. The most oftenly used rods are of box square section. The aim of the work is to provide the calculation of the shells and plates supported by rods of box square section using finite elements with nodes along the contours of the sections equal to the attachment points of the rod.

Materials and methods. The research is based on the finite element method using discrete calculation schemes and software.

Results. In a standard finite element formulation using the matrixes of nodal forces transfer and displacements the author obtained the expressions in block form of stiffness matrixes of rod finite element nodes along the contours of the sections, corresponding to symmetrical mounting of a rod and the "chess" order. Modeling of the reinforced constructions, more fully reflecting force and kinematic interaction of rods, plates and shells in the nodes of their connection, are implemented in special computer programs.

Conclusions. An approach to modelling of the supported construction allows in its finite element model to take into consideration the conditions of mounting of rods of box square section, which better reflects the peculiarities of finite element linking. Compute calculation programs can be recommended for the kinematic analysis of various metal structures at shell-rod and plate-rod idealization.

Key words: shell, slab, rod, nodes along the section contour, stiffness matrix, supported construction, computer program.

Введение

При расчете методом конечных элементов оболочки и пластины, подкрепленных стержнями, конечно-элементные (КЭ) модели задач рассматриваются с единых позиций как оболочечно-стержневые и пластинчато-стержневые системы. КЭ оболочки моделируются как совокупность плоских элементов, работающих в плоскости КЭ и на изгиб, пластины моделируются КЭ пластины, работающими на изгиб. Стержень представляет собой линию, наделенную соответствующими физическими и геометрическими характеристиками.

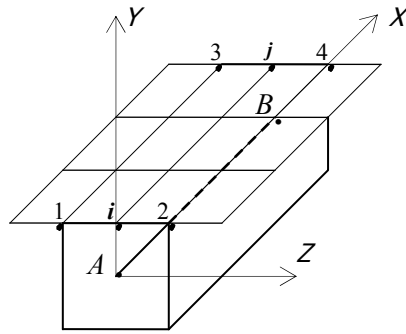
В подкрепленной оболочке используется пространственный балочный КЭ, а в подкрепленной пластине – балочный КЭ, работающий на изгиб и кручение. Эксцентриситет оси стержня по отношению к плоскости оболочки или пластины, как правило, не учитывается, т.е. балочный КЭ располагается в их плоскости, не учитываются и условия крепления стержня [1–4]. Наиболее часто используются стержни коробчатого квадратного сечения (труба профильная ГОСТ 8639–82), обладающие конструктивным преимуществом в сравнении с другими профилями. Рассматривается стержень коробчатого квадратного сечения с узлами по контурам сечений, соответствующими узлам его крепления к оболочке и пластине. Матрицы жесткости стержней получены переносом узловых сил и перемещений из узлов, расположенных по концам оси стержня.

1. Учет эксцентриситета оси стержня

На рис. 1 представлен фрагмент оболочки, подкрепленной стержнем коробчатого сечения и принятые положительные направления узловых сил и перемещений.

Оболочка моделируется прямоугольными КЭ оболочки, а стержень – пространственным балочным КЭ $A-B$. Узлы A , B расположены в центрах тяжести поперечных сечений в начале и конце стержня. Ось X местной системы координат направлена вдоль оси стержня; оси Y , Z – главные оси инерции сечения стержня.

Приведем векторы $\{P_A\}$ и $\{P_B\}$ узловых сил соответственно начала КЭ $A-B$ к узлу i , а конца – к узлу j , и получим матрицу $[K_{i-j}]$ жесткости балочного КЭ с этими узлами; $Ai = Bj$ – эксцентриситет оси стержня.



Положительные направления
узловых сил и перемещений

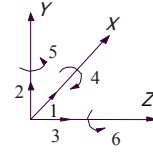


Рис. 1. Фрагмент оболочки, подкрепленной стержнем

Уравнение равновесия балочного КЭ $A-B$ сгруппируем и разобьем на подматрицы по узлам A и B [2, 3]:

$$\begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Z_A \\ Z_B \end{Bmatrix},$$

где K_{AA}, \dots, K_{BB} – подматрицы порядка 6 матрицы $[K_{A-B}]$ жесткости КЭ; $\{P_A\}$, $\{Z_A\}$ и $\{P_B\}$, $\{Z_B\}$ – векторы сил и перемещений узлов A и B соответственно.

Перемножим сгруппированные элементы матриц:

$$\begin{aligned} \{P_A\} &= [K_{AA}]\{Z_A\} + [K_{AB}]\{Z_B\}; \\ \{P_B\} &= [K_{BA}]\{Z_A\} + [K_{BB}]\{Z_B\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно принятым положительным направлениям узловых сил и перемещений и правилу переноса сил из узла A в узел i вектор $\{P_i\}$ сил в узле i начала стержневого КЭ запишется в виде

$$\{P_i\} = \begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{xA} \\ P_{yA} \\ P_{zA} \\ -P_{zA}y_i + M_{xA} \\ M_{yA} \\ P_{xA}y_i + M_{zA} \end{Bmatrix},$$

где y_i – координата i -го узла.

Связь векторов $\{P_i\}$ и $\{P_A\}$ узловых сил в начале КЭ в матричной форме можно выразить следующим образом:

$$\{P_i\} = [h_i]\{P_A\},$$

где $[h_i]$ – матрица переноса сил i -го узла с координатой $z_i = 0$:

$$[h_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица переноса сил КЭ в узлы i , j определится выражением

$$[H] = \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \end{bmatrix};$$

$$[h_i] = [h_j],$$

а связь векторов $\{P_{i-j}\}$ и $\{P_{A-B}\}$ узловых сил КЭ в матричной форме следующая:

$$\{P_{i-j}\} = [H]\{P_{A-B}\}. \quad (2)$$

Из преобразований сил следуют преобразования перемещений:

$$\{Z_{A-B}\} = [H]^T \{Z_{i-j}\}. \quad (3)$$

Подставив в выражение для вектора узловых сил (2) вектор $\{P_{A-B}\}$ (1), с учетом (3) получим

$$\{P_{i-j}\} = [H][K_{A-B}][H]^T \{Z_{i-j}\},$$

что определяет матрицу жесткости КЭ с узлами i и j , учитывающей эксцентриситет оси стержня по отношению к плоскости оболочки, в которых расположены и узлы сопряжения прямоугольных КЭ:

$$[K_{i-j}] = [H][K_{A-B}][H]^T.$$

2. Матрицы жесткости

Рассмотренный подход к формированию матрицы $[K_{i-j}]$ позволяет учитывать особенности крепления стержня к оболочке. Пусть крепление стержня выполняется сваркой. Различают симметричное крепление и в «шахматном» порядке. При симметричном креплении стержня узлы 1–4 являются узлами сварки. В конечно-элементной модели подкрепленной конструкции необходимо, чтобы в этих узлах были расположены и узлы сопряжения прямоугольных КЭ. Получим матрицу $[K_{1-4}]$ жесткости балочного КЭ с этими узлами. Вектор $\{P_1\}$ узловых сил в узле 1 начала стержневого КЭ запишется в виде

$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{xA} \\ P_{yA} \\ P_{zA} \\ P_{yA}z_1 - P_{zA}y_1 + M_{xA} \\ -P_{xA}z_1 + M_{yA} \\ P_{xA}y_1 + M_{zA} \end{Bmatrix}.$$

Связь векторов $\{P_1\}$ и $\{P_A\}$ сил 1-го узла и узла A в матричной форме будет иметь вид

$$\{P_1\} = [h_1]\{P_A\},$$

где $[h_1]$ – матрица переноса сил 1-го узла:

$$[h_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -z_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда вектора узловых сил $\{P_{1,2}\}$, $\{P_{3,4}\}$ узлов 1, 2 и 3, 4 КЭ определяются следующими выражениями:

$$\{P_{1,2}\} = [H_{1,2}]\{P_A\}; \quad \{P_{3,4}\} = [H_{3,4}]\{P_B\},$$

где матрицы переноса сил узлов КЭ имеют вид

$$[H_{1,2}] = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}; \quad [H_{3,4}] = \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}.$$

Так как оболочка подкрепляется стержнями постоянного сечения, то для матриц переноса узловых сил КЭ справедливы следующие соотношения:

$$[H] = [H_{1,2}] = [H_{3,4}].$$

С учетом одной матрицы $[H]$ из преобразований сил следуют преобразования перемещений:

$$\{Z_A\} = [H]^T \{Z_{1,2}\}; \quad \{Z_B\} = [H]^T \{Z_{3,4}\}.$$

Выражения для векторов узловых сил $\{P_{1,2}\}$, $\{P_{3,4}\}$ имеют следующий вид:

$$\{P_{1,2}\} = [H][K_{AA}][H]^T \{Z_{1,2}\} + [H][K_{AB}][H]^T \{Z_{3,4}\};$$

$$\{P_{3,4}\} = [H][K_{BA}][H]^T \{Z_{1,2}\} + [H][K_{BB}][H]^T \{Z_{3,4}\},$$

что определяет матрицу порядка 24 жесткости балочного КЭ в блочной форме с узлами 1, 2 в начале стержня и с узлами 3, 4 в конце:

$$[K_{1-4}] = \begin{bmatrix} HK_{AA}H^T & HK_{AB}H^T \\ HK_{BA}H^T & HK_{BB}H^T \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Если сформировать следующую матрицу переноса сил КЭ:

$$[H_{1-4}] = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix},$$

то в этом случае матрица $[K_{1-4}]$ жесткости балочного КЭ будет вычисляться по формуле

$$[K_{1-4}] = [H_{1-4}][K_{A-B}][H_{1-4}]^T. \quad (5)$$

Векторы узловых сил и перемещений КЭ соответственно имеют вид

$$\{P_{1-4}\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}; \quad \{Z_{1-4}\} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{Bmatrix}.$$

При креплении стержня к оболочке в «шахматном» порядке, например в узлах 1 и 4, матрица порядка 12 жесткости балочного КЭ с этими узлами по контурам сечений имеет следующий вид:

$$[K_{1,4}] = \begin{bmatrix} h_1 K_{AA} h_1^T & h_1 K_{AB} h_4^T \\ h_4 K_{BA} h_1^T & h_4 K_{BB} h_4^T \end{bmatrix}. \quad (6)$$

По аналогии, если сформировать следующую матрицу переноса сил КЭ с узлами 1 и 4:

$$[H_{1,4}] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_4 \end{bmatrix},$$

тогда матрица $[K_{1,4}]$ жесткости балочного КЭ будет вычисляться по формуле

$$[K_{1,4}] = [H_{1,4}][K_{A-B}][H_{1,4}]^T. \quad (7)$$

Векторы узловых сил и перемещений КЭ соответственно будут равны

$$\{P_{1,4}\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_4 \end{Bmatrix}; \quad \{Z_{1,4}\} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_4 \end{Bmatrix}.$$

Пусть пластина моделируется прямоугольными КЭ, работающими на изгиб, а стержень моделируется балочным КЭ $A-B$, работающим на изгиб и

кручение. Система координат, положительные направления узловых сил, перемещений и их последовательность приведены на рис. 2.

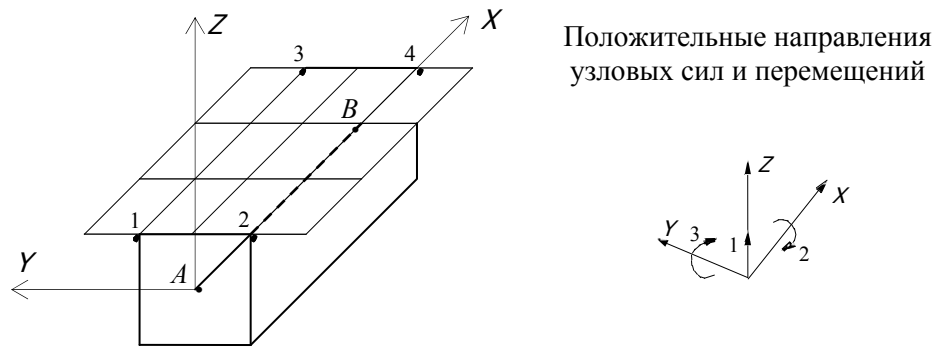


Рис. 2. Фрагмент пластины, подкрепленной стержнем

Процедура вычисления матрицы жесткости балочного КЭ при изгибе пластины полностью совпадает с вычислением при расчете оболочки.

В этом случае вектор $\{P_1\}$ сил в узле 1 начала стержневого КЭ будет иметь вид

$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} P_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{zA} \\ -P_{zA}y_1 + M_{xA} \\ M_{zA} \end{Bmatrix}.$$

Связь векторов $\{P_1\}$ и $\{P_A\}$ узловых сил в начале КЭ в матричной форме имеет вид

$$\{P_1\} = [h_1]\{P_A\},$$

где $[h_1]$ – матрица переноса сил 1-го узла:

$$[h_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

При креплении стержня к пластине в узлах 1–4 матрица $[K_{1-4}]$ жесткости балочного КЭ вычисляется по формуле (4) или (5), где матрицы $[h]$ переноса узловых сил вычисляются по формуле (8). Порядок матрицы $[K_{1-4}]$ равен 12.

В случае крепления стержня к пластине в «шахматном» порядке в узлах 1, 4 матрица $[K_{1,4}]$ жесткости балочного КЭ вычисляется по формуле (6) или (7). Порядок матрицы $[K_{1,4}]$ равен 6.

Приведенные преобразования выполнены в местной системе координат.

3. Численная реализация

Подход к расчету тонкой подкрепленной пластины и оболочки реализован в целевых (объектно-ориентированных) программах [5, 6], предназначенных для анализа методом конечных элементов их напряженно-деформированного состояния, с использованием в конечно-элементной модели балочных, треугольных и прямоугольных КЭ [7]. Расчет может быть выполнен при действии распределенной нагрузки, сосредоточенных сил и заданных перемещений, с подкреплением стержнями или без. Возможен расчет произвольной стержневой системы. Единицы измерений силы и длины выбираются расчетчиком и определяются соответствующими единицами измерений модуля упругости материала.

Общая характеристика программ: ЭВМ: IBM PC-совместимый ПК; Язык: Fortran; ОС: Windows; объем: 53,2 Кб и 33,0 Кб исходного текста соответственно.

Согласно принятым узловым перемещениям при формировании матрицы жесткости КЭ оболочки используется подход, рассмотренный в работе [5], при котором вводятся фиктивные (недостающие) степени свободы в каждый узел, соответствующие углу поворота в плоскости КЭ. При численной реализации необходимо проверить наличие таких уравнений по элементам главной диагонали соответствующей матрицы коэффициентов, равных нулю, и ввести жесткость, отличную от нуля. В результате расчета в этом узле угол поворота в плоскости КЭ будет равен нулю.

Заключение

Предлагаемый подход к моделированию подкрепленных конструкций позволяет в конечно-элементной модели задачи учесть влияние эксцентриситета оси стержня и условия его крепления, что полнее отражает особенности сопряжения КЭ. Программы расчета на ЭВМ можно рекомендовать для кинематического анализа цилиндрических и коробчатых конструкций, как правило, с внешним стержневым каркасом [8] и других различных соответствующих металлических конструкций. Следует отметить, что в подкрепленной пластине и оболочке стержни работают на изгиб и кручение. В связи с чем в приведенных сортаментах квадратных труб даны допустимые углы закручивания (скручивание стержней на 1 м длины стержня) для различных способов изготовления профилей.

Список литературы

1. **Постнов, В. А.** Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / В. А. Постнов, С. А. Дмитриев, Б. К. Елтышев, А. А. Родионов. – Л. : Судостроение, 1979. – 287 с.
2. **Постнов, В. А.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Л. : Судостроение, 1974. – 485 с.
3. **Городецкий, А. С.** Численная реализация метода конечных элементов / А. С. Городецкий // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Вып. XX. – Киев : Будивельник, 1973. – С. 31–42.
4. **Мяченков, В. И.** Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов : справочник / В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др. – М. : Машиностроение, 1989. – 520 с.

5. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006612561. Оболочка как совокупность плоских элементов, подкрепленная тонкостенными стержнями / Дьяков И. Ф., Чернов С. А., Черный А. Н. ; заявитель и правообладатель Ульянов. гос. техн. ун-т. – № 2006611769 ; заявл. 30.05.2006 ; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 20.07.2006. – М. : Роспатент, 2006.
6. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2012617590. Изгиб пластины, подкрепленной стержнями / Чернов С. А. ; заявитель и правообладатель Ульянов. гос. техн. ун-т. – № 2012615327 ; заявл. 26.06.2012 ; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 22.08.2012. – М. : Роспатент, 2012.
7. **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
8. **Чернов, С. А.** О расчете методом конечных элементов емкости реактора на стадии проектирования / С. А. Чернов, И. Ф. Дьяков // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2007. – № 3. – С. 16–20.

References

1. Postnov V. A., Dmitriev S. A., Eltyshev B. K., Rodionov A. A. *Metod superelementov v raschetakh inzhenernykh sooruzheniy* [Method of superelements in calculation of engineering structures]. Leningrad: Sudostroenie, 1979, 287 p.
2. Postnov V. A., Kharkhurim I. Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksiy* [Method of finite elements in calculation of ship structures]. Leningrad: Sudostroenie, 1974, 485 p.
3. Gorodetskiy A. S. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy* [Strength of materials and structural theory]. Issue XX. Kiev: Budivel'nik, 1973, pp. 31–42.
4. Myachenkov V. I., Mal'tsev V. P., Mayboroda V. P. et al. *Raschety mashinostroitel'nykh konstruksiy metodom konechnykh elementov: spravochnik* [Calculation of mechanical engineering structures by the method of finite elements: reference]. Moscow: Mashinostroenie, 1989, 520 p.
5. Certificate of official registration of computer program № 2006612561. Shell as a combination of planr elements, supported by thin-walled rods. D'yakov I. F., Chernov S. A., Chernyy A. N.; applicant and rightholder – Ulyanovsk State Technical University, submitted on 30.05.2006; registered in the Computer program register 20.07.2006. no. 2006611769. Moscow: Rospatent, 2006.
6. Certificate of official registration of computer program №2012617590. Curve of a plate, supported by rods. Chernov S. A.; applicant and rightholder – Ulyanovsk State Technical University, submitted on 26.06.2012; registered in the Computer program register]. 22.08.2012 no. 2012615327. Moscow: Rospatent, 2012.
7. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Method of finite elements in technology]. Moscow: Mir, 1975, 541 p.
8. Chernov S. A., D'yakov I. F. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [University proceedings. Mechanical engineering]. 2007, no. 3, pp. 16–20.

Чернов Сергей Анатольевич

кандидат технических наук,
преподаватель, колледж экономики
и информатики, Ульяновский
государственный технический
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Северный Венец, 32)

E-mail: 727122@mail.ru

Chernov Sergey Anatol'evich

Candidate of engineering sciences, lecturer,
College of economics and computer
sciences, Ulyanovsk State Technical
University (32 Severniy Venets street,
Ulyanovsk, Russia)

УДК 624.074

Чернов, С. А.

Моделирование тонкостенных конструкций, подкрепленных стержнями коробчатого сечения / С. А. Чернов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2014. – № 1 (29). – С. 102–111.